# **CHƯƠNG I: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC**

# **BÀI 1: GÓC LƯỢNG GIÁC**

***(17 câu)***

## **1. NHẬN BIẾT (5 câu)**

**Câu 1:**

a) Đổi số đo của các góc sau sang rad: $3a^{o}$; $60^{o};$$80^{o}$; $108^{o}$; $45^{o}32^{'}$ (độ chính xác đến hàng phần nghìn); $40^{o}25^{'}$ (độ chính xác đến hàng phần trăm);

b) Đổi số đo của các góc sau sang độ (độ chính xác đến phút): ; ; - 2;  .

**Giải:**

Áp dụng công thức $α=\frac{aπ}{180}$ với $α$ tính bằng radian, a tính bằng độ.

a) Kết quả lần lượt là:

; ; ; 0,795; 0,71.

b) Kết quả lần lượt là: 

**Câu 2:**

a) đổi số đo độ ra số đo rađian chính xác đén số thập phân thứ ba :
 $20^{∘}$;
 $-144^{∘}$;
 $2003^{∘}$;
 $π^{∘}$

**b)** Một bánh răng có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là.

**Giải:**

a) Kết quả lần lượt là

$0,349$;

$-2,513$;

$34,959$;

$0,055$.

b) 72 răng tương ứng với  nên 10 răng tương ứng là .

**Câu 3:**

a)Cho góc lượng giác  Với giá trị  bằng bao nhiêu thì

góc  ?

b) Cho bốn góc lượng giác :  ;  ; ; . Xác định điểm

biểu diễn góc lượng giác đó trên đường tròn lượng giác.

**Giải:**

a) 

b)

Gọi góc lượng giác $α, β, γ, δ$ có điểm biểu diễn lần lượt là M, N, P, Q.

Biểu diễn M, N, P, Q trên đường tròn lượng giác



Điểm M và Q thuộc vào góc phần tư thứ III sao cho (theo chiều âm).

Điểm N và P thuộc vào góc phần tư thứ I sao cho .

**Câu 4:** Đổi số đo của các góc lượng giác sau ra rađian, với độ chính xác đến 0,0001
a) $20^{∘}$ :
b) $40^{∘}25^{'}$;
c) $-27^{∘}$;
d) $-53^{∘}30^{'}$.

**Giải:**

a) $20^{∘}≈0,3490$
b) $40^{∘}25^{'}≈0,7054$;
c) $-27^{∘}≈-0,4712$;
d) $-53^{∘}30^{'}≈-0,9337$.

**Câu 5:** Đổi số đo của các góc sau ra độ, phút, giây
a) $\frac{π}{17}$;
b) $\frac{2}{3}$;
c) -5 ;
d) $-\frac{2π}{7}$.

**Giải:**

a) $10^{∘}35^{'}58^{''}$;
b) $38^{∘}11^{'}50^{''}$;
c) $-286^{∘}28^{'}44^{''}$
d) $-51^{∘}24^{'}9"$.

## **2. THÔNG HIỂU (7 câu)**

**Câu 1:** Hãy tìm số đo $a^{∘}$ của góc lượng giác $(Ou,Ov),0\leq a<360$, biết một góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với góc đó có số đo là :

$$395^{∘};-1052^{∘};-972^{∘};(20π)^{∘}. $$

**Giải:**

Các số $a^{∘}$ cần tìm theo thứ tự là : $35^{∘};28^{∘};108^{∘};(20π)^{∘}\left(≈62^{∘}49^{'}55^{''}\right)$.

**Câu 2:** Cho góc lượng giác $(Ou,Ov)$ có số đo $\frac{π}{5}$. Hỏi trong các số $\frac{6π}{5};\frac{9π}{5}$; $-\frac{11π}{5};\frac{31π}{5};-\frac{14π}{5}$, những số nào là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đâu, tia cuối với góc đã cho ?

**Giải:**

Các góc lượng giác $(Ou,Ov)$ có số đo là $\frac{π}{5}+k2π=(10k+1)\frac{π}{5}⋅k\in Z$.

Vậy trong các số đo đã cho chỉ có số $\frac{31π}{5}$.

**Câu 3:** Trên đường tròn lượng giác, hãy biểu diễn các cung có số đo tương ứng là
a) $-\frac{17}{4}π$;
b) $240^{∘}$;
c) $\frac{2kπ}{3},k\in Z$.

**Giải:**

a)



Điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $-\frac{17}{4}π$ là điểm M nằm trong góc phần tư thứ IV sao cho .

**b)**



Điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $240^{o}$ là điểm M nằm trong góc phần tư thứ III sao cho .

c)

k = 0, được góc có số đo bằng 0, điểm biểu diễn trùng với điểm A.

k = 1, được góc có số đo bằng , điểm biểu diễn trùng với điểm M1.

k = 2, được góc có số đo bằng , điểm biểu diễn trùng với điểm M2.

Khi lấy k = 3 ta được cung có số đo , điểm biểu diễn trùng điểm A, lấy k = 4 thì trùng M1…..



**Câu 4:** Trên đường tròn lượng giác hãy tìm các điểm xác định bởi các số :

$$\frac{π}{4}+k\frac{π}{2},(k\in Z); k\frac{π}{3}.(k\in Z); k\frac{2π}{5},(k\in Z)$$

**Giải**

+) Các điểm trên đường tròn lượng giác xác định bởi các số $\frac{π}{4}+k\frac{π}{2},(k\in Z)$ là bốn điểm của hình vuông nội tiếp đường tròn đó, có hai cạnh song song với $OA$, (chỉ cần lấy $k=0,1,2,3$ ).

+) Các điểm trên đường tròn lượng giác xác định bởi các số $k\frac{π}{3}⋅(k\in Z)$, là các đỉnh của lục giác đều nội tiếp đường tròn đó, trong đó một đỉnh là gốc $A$ của đường tròn lượng giác (chỉ cần lấy $k=0,1,2,3,4,5$ ).

+) Các điểm trên đường tròn lượng giác xác định bởi các số $\frac{2π}{5}⋅(k\in Z)$, là các đỉnh của ngũ giác đều nội tiếp đường tròn đó, trong đó một đỉnh là gốc $A$ của đường tròn lượng giác (chỉ cần lấy $k=0,1,2,3,4$ ).

**Câu 5:** Cho số $α, \frac{π}{2}<α<π$. Hỏi các điểm trên đường tròn lượng giác xác định bởi các góc lượng giác sau nằm trong góc phần tư nào của hệ toạ độ vuônng góc gắn với đường tròn đó :

$$α-π;α+\frac{π}{2};\frac{π}{2}-α;\frac{3π}{2}-α?$$

**Giải:**

Điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo$α$ nằm ở góc phần tư thứ II.

Điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo$α-π$ nằm ở góc phần tư thứ IV.

Điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo$α+\frac{π}{2}$ nằm ở góc phần tư thứ III.

Điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo$\frac{π}{2}-α$ nằm ở góc phần tư thứ III.

Điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo$α+\frac{π}{2}$ nằm ở góc phần tư thứ IV.

Điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo$ \frac{3π}{2}-α$nằm ở góc phần tư thứ II.

**Câu 6:** Cho góc lượng giác (OA, OB) có số đo là $15rad$. Tìm số lớn nhất trong các số đo của góc lượng giác điểm đầu $A$, điểm cuối $B$, có số đo âm.

**Giải:**

Ta có $sd(OA,OB)=15+k2π,k\in Z$

$$15+k2π<0⇔k<-\frac{15}{2π}. $$

Vậy với $k=-3$ ta được số đo của góc lượng giác (OA, OB) có số đo âm lớn nhất là $15-6π$.

**Câu 7:** Hãy tìm só́ đo $α$ của góc lượng giác $(Ou,Ov)$ với $0\leq α<2π$, biết một góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với góc đó có số đo là :

$$\frac{29π}{4};-\frac{128π}{3};-\frac{2003π}{6};18,5. $$

**Giải:**

Các số $α$ cần tìm theo thứ tự là $\frac{5π}{4};\frac{4π}{3};\frac{π}{6};α≈1,889π≈5,934$.

## **3. VẬN DỤNG (3 câu)**

**Câu 1:** Một hình lục giác đều $ABCDEF$ (các đỉnh lấy theo thứ tự đó và ngược chiều quay của kim đồng hồ) nội tiếp trong đường tròn tâm $O$. Tính số đo bằng rađian của các góc lượng giác sau: (OA, OB); (OA; OC); (OA, OD); (OA, OE); (OA, OF).

**Giải:**

****

$$\begin{matrix}& sđ (OA, OB)=\frac{π}{3}+k2π,k\in Z;\\& sd (OA, OC)=\frac{2π}{3}+k2π,k\in Z;\\& sđ (OA, OD)=π+k2π,k\in Z;\\& sđ (OA, OE)=\frac{4π}{3}+k2π,k\in Z;\\& sđ (OA, OF)=\frac{5π}{3}+k2π,k\in Z.\end{matrix}$$

**Câu 2:** Tìm số $x(0\leq x<2π)$ và số nguyên $k$ sao cho $a=x+k2π$ trong các trường hợp
a) $a=12,4π$
b) $a=-\frac{9}{5}π$
c) $a=\frac{13}{4}π$

**Giải:**

a) $x=0,4π;k=6$
b) $x=\frac{π}{5};k=-1$
c) $x=\frac{5π}{4},k=1$

**Câu 3:** Chứng minh rằng nếu $sđ(Ou,Ov)=α,sđ⁡\left(Ou^{'},Ov^{'}\right)=β$ thì các góc hình học $uOv,u^{'}Ov^{'}$ bằng nhau khi và chỉ khi hoặc $β-α=k2π$ hoặc $β+α=k2π(k\in Z)$.

**Giải:**

Viết $α=α\_{0}+k\_{0}2π,-π<α\_{0}\leq π,\left(k\_{o}\in Z\right)$ và

$β=β\_{0}+l\_{o}2π,-π<β\_{0}\leq π,\left(l\_{o}\in Z\right)$, ta có $\left|α\_{0}\right|$ là số đo của $\hat{uOv},|β\_{o}|$ là số đo của $\hat{u^{'}Ov^{'}}$ .

Hai góc hình học bằng nhau khi và chỉ khi

$$\begin{matrix}&\left|α\_{0}\right|=\left|β\_{0}\right|⇔β\_{o}=α\_{o} hoặc α\_{0}=-β\_{o}\\& ⇔β-α=k2π hoặc β+α=k2π,(k\in Z). \end{matrix}$$

## **4. VẬN DỤNG CAO (2 câu)**

**Câu 1:** Trên đường tròn lượng giác cho điểm $M$ xác định bởi sđ $\overparen{AM}=-40^{∘}$. Gọi $M\_{1},M\_{2},M\_{3}$ tương ứng là điểm đối xứng của $M$ qua đường phân giác của góc phần tư thứ $I$, trục $Ox$ và trục $Oy$. Tìm số đo của các cung lượng giác $\hat{AM}\_{1},\hat{AM}\_{2},\hat{AM}\_{3}$

**Giải:**

Gọi giao điểm của đường phân giác góc phần từ thứ I với đường tròn lượng giác là D.



a) Ta có $\overparen{MD}=\overparen{MA}+\overparen{AD}$

$$\begin{matrix}⇒sd\overparen{MD}& =40^{∘}+45^{∘}=85^{∘}\\⇒sd\overparen{DM\_{1}}& =85^{∘}.\\ Do đó sd \overparen{AM\_{1}}& =sd⁡\overparen{AD}+sd\overparen{DM}\_{1}\\& =45^{∘}+85^{∘}=130^{∘}.\end{matrix}$$

Vậy sđ $\hat{AM}\_{1}=130^{∘}+k360^{∘},k\in Z$.

b) Ta có $\overparen{MA}=\overparen{AM}\_{2}$. Vậy sd $\hat{AM}\_{2}=40^{∘}+k360^{∘},k\in Z$.

c) Ta có sd $\overparen{MA}=$ sd $\overparen{AA}^{'}M\_{3}=40^{∘}$ suy ra sd $\overparen{AM}\_{3}=40^{∘}+180^{∘}=220^{∘}$.

**Câu 2:**

a) Trong các góc lượng giác có tia đầu $Ou$, tia cuối $Ov$ cho trước, chứng minh rằng, có một góc lượng giác duy nhất $(Ou,Ov)$ có só đo $α$, $-π<α\leq π$ và chứng minh rằng $|α|$ là số đo rađian của góc hình học $uOv$.

b) Tìm số đo của góc hình học $uOv$, biết góc lượng giác $(Ou,Ov)$ có só́ đo là :

* $\frac{9π}{7};-\frac{5π}{8};\frac{106π}{9};-2003$.
* $-220^{∘};-235^{∘};1945^{∘};-2003^{∘}$

**Giải:**

Nếu một góc lượng giác $(Ou,Ov)$ có số đo $α,-π<α\leq π$, thì mọi góc lượng giác $(Ou,Ov)$ khác có số đo $α+k2π(k\in Z∖\{0∣)$, nhưng dễ thấy $α+k2π\notin (-π;π]$, với $k$ nguyên khác không, vậy góc lượng giác đó là duy nhất.

Khi hai tia $Ou,Ov$ đối nhau thì một góc lượng giác $(Ou,Ov)$ có số đo là $π$ và $π$ cũng là số đo rađian của góc bẹt $uOv$. Khi $Ou,Ov$ không đói nhau thì số đo góc hình học $uOv$ là $β,0\leq β<π$ và sđ $(Ou,Ov)$ là $β+k2π$ hoặc $-β+k2π(k\in Z)$ tức là :

$$sđ⁡(Ou,Ov)=α+k2π;|α|=β.$$

b) Số đo góc hình học $uOv$ cần tìm theo thứ tự là

* $\frac{5π}{7};\frac{5π}{8};\frac{2π}{9};≈1,336$ (do $2003≈319.2π-1,336$ và $-π<-1,336\leq π$ );
* $140^{∘};125^{∘};145^{∘};157^{∘}$ .